ÉLÉMENTS

DE GÉOMÉTRIE

PAR A. M. LEGENDRE,

AVEC ADDITIONS ET MODIFICATIONS,

PAR M. A. BLANCHET,

Ancien élève de l'École polytechnique,
directeur des études mathématiques de Sainte-Barbe.

DEUXIÈME ÉDITION,

SUIVIE

DE LA QUINZIÈME ÉDITION,

DONNÉE

PAR A. M. LEGENDRE,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DE LA LÉGION D'HONNEUR,
DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE LONDRES, ETC.

PARIS,

LIBRAIRIE DE FIRMIN DIDOT FRÈRES,

IMPRIMEURS DE L'INSTITUT DE FRANCE,

RUE JACOB, 56.

1849.

ÉLÉMENTS

DE GÉOMÉTRIE.

LIVRE PREMIER.

DÉFINITIONS.

I. Tout corps occupe dans l'espace indéfini un lieu déterminé qu'on appelle *volume*.

II. La *surface* d'un corps est la limite qui le sépare de l'espace environnant.

III. Le lieu où les surfaces de deux corps se rencontrent est appelé *ligne*.

IV. Un *point* est le lieu où deux lignes se coupent.

V. On conçoit les volumes, les surfaces, les lignes, indépendamment des corps auxquels ils appartiennent.

VI. On donne le nom de figures aux volumes, aux surfaces, et aux lignes.

VII. La *géométrie* a pour objet la mesure de l'étendue des figures, et l'étude de leurs propriétés.

VIII. La *ligne droite* est une ligne indéfinie qui est le plus court chemin entre deux quelconques de ses points.

On doit regarder comme évident que si deux portions de lignes droites coïncident, ces lignes coïncident dans toute leur étendue.

IX. Une ligne brisée ou polygonale est une ligne composée de lignes droites.

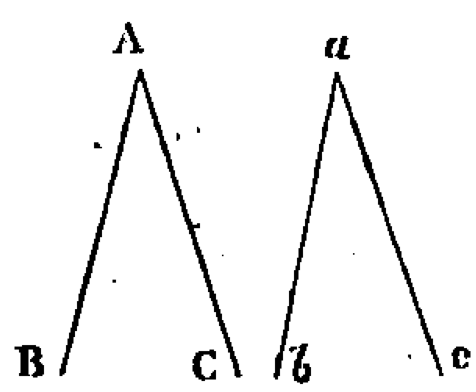
X. Toute ligne qui n'est ni droite ni composée de lignes droites, est une ligne courbe.

XI. Le *plan* est une surface dans laquelle prenant deux points à volonté, et joignant ces deux points par une droite, cette ligne est tout entière dans la surface.

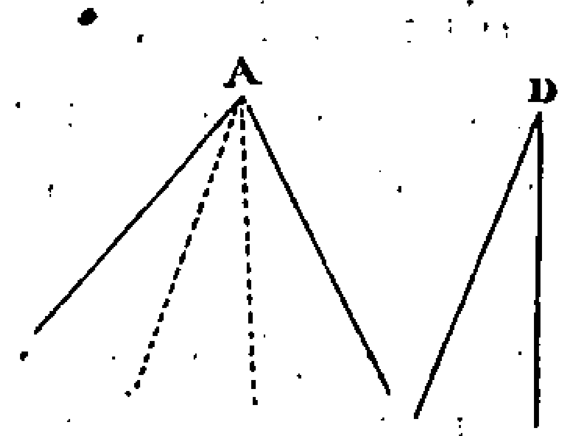
XII. Toute surface qui n'est ni plane ni composée de surfaces planes, est une surface courbe.

XIII. La figure formée par deux droites A B, A C qui se coupent, s'appelle angle. Le point A est le sommet de l'angle; les lignes AB, AC, en sont les côtés.

L'angle se désigne quelquefois par la lettre du sommet A; d'autres fois par trois lettres BAC ou CAB, en ayant soin de mettre la lettre du sommet au milieu.



Deux angles A et *a* sont dits égaux, lorsqu'on peut les faire coïncider. Ainsi, supposons qu'on porte l'angle *a* sur A, de manière que *ab* s'applique sur AB; si *ac* prend la direction AC, les côtés des deux angles coïncideront, et les deux angles seront dits égaux.



Un angle A est double, triple, etc., de l'angle D, s'il renferme entre ses côtés, deux, trois... angles égaux à l'angle D.

Les angles sont donc comparables entre eux comme les autres grandeurs.

XIV. Lorsque la ligne droite AB rencontre une autre
fig. 3. droite CD, de telle sorte que les angles adjacents BAC, BAD,

soient égaux entre eux, la ligne AB est dite perpendiculaire sur CD, et les angles égaux BAC, BAD, sont appelés *angles droits*.

Il sera démontré que par un point A pris sur une droite CD on peut toujours élever une perpendiculaire sur cette droite, et que tous les angles droits sont égaux entre eux.

Tout angle plus grand qu'un angle droit est un angle obtus; tout angle plus petit qu'un angle droit est un angle aigu.

On appelle angles supplémentaires deux angles dont la somme est égale à deux droits; et angles complémentaires, deux angles dont la somme vaut un droit.

XV. Deux lignes sont dites *parallèles*, lorsque, étant situées dans le même plan, elles ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'une et l'autre. Telles sont les lignes AB, CD. fig. 5.

XVI. *Figure plane* est un plan terminé de toutes parts par des lignes.

Si les lignes sont droites, l'espace qu'elles renferment s'appelle *figure rectiligne* ou *polygone*, et les lignes elles-mêmes prises ensemble forment le contour ou *périmètre* du polygone. fig. 6.

XVII. Le polygone de trois côtés est le plus simple de tous, il s'appelle *triangle*; celui de quatre côtés s'appelle *quadrilatère;* celui de cinq, *pentagone;* celui de six, *hexagone*, etc.

XVIII. On appelle triangle *équilatéral* celui qui a ses trois côtés égaux; triangle *isocèle*, celui dont deux côtés seulement sont égaux; triangle *scalène*, celui qui a ses trois côtés inégaux. fig. 7. fig. 8. fig. 9.

XIX. Le triangle *rectangle* est celui qui a un angle droit Le côté opposé à l'angle droit s'appelle *hypoténuse* : ainsi ABC est un triangle rectangle en A, le côté BC est son hypoténuse. fig. 10.

XX. Parmi les quadrilatères on distingue :

fig. 11. Le *carré*, qui a ses côtés égaux et ses angles droits.

fig. 12. Le *rectangle*, qui a les angles droits sans avoir les côtés égaux.

fig. 13. Le *parallélogramme* ou *rhombe*, qui les a côtés opposés parallèles.

fig. 14. Le *losange*, dont les côtés sont égaux sans que les angles soient droits.

fig. 15. Enfin le *trapèze*, dont deux côtés seulement sont parallèles.

fig. 42. XXI. On appelle *diagonale* la ligne qui joint les sommets de deux angles non adjacents : telle est AC.

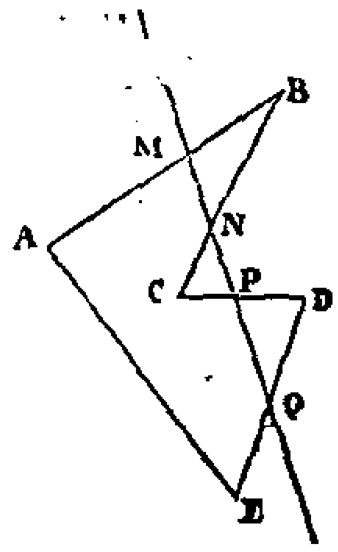
XXII. Polygone *équilatéral* est celui dont tous les côtés sont égaux; polygone *équiangle*, celui dont tous les angles sont égaux.

XXIII. Deux polygones sont *équilatéraux entre eux* lorsqu'ils ont les côtés égaux chacun à chacun, et placés dans le même ordre, c'est-à-dire, lorsqu'en suivant leurs contours dans un même sens, le premier côté de l'un est égal au premier de l'autre, le second de l'un au second de l'autre, le troisième au troisième, et ainsi de suite. On entend de même ce que signifient deux polygones *équiangles entre eux*.

Dans l'un ou l'autre cas, les côtés égaux ou les angles égaux s'appellent côtés ou angles *homologues*.

XXIV. On appelle polygone convexe, un polygone situé entièrement d'un même côté de la direction de chacun de ses côtés.

Le périmètre d'un polygone convexe ne peut être rencontré par une droite en plus de deux points; car si une droite MQ rencontrait le périmètre ABCDE aux points M,N,P,Q, le côté BC qui est rencontré par la droite en l'un des points intermédiaires N, aurait évidemment des parties de la figure situées de part et d'autre de sa direction.



N. B. Dans les quatre premiers livres il ne sera question que de figures planes ou tracées sur une surface plane.

Explication des termes et des signes.

Axiome est une proposition évidente par elle-même.

Théorème est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé *démonstration*.

Problème est une question proposée qui exige une *solution*.

Lemme est une vérité employée subsidiairement pour la démonstration d'un théorème ou la solution d'un problème.

Le nom commun de *proposition* s'attribue indifféremment aux théorèmes, problèmes, et lemmes.

Corollaire est la conséquence qui découle d'une ou de plusieurs propositions.

Scolie est une remarque sur une ou plusieurs propositions précédentes, tendant à faire apercevoir leur liaison, leur utilité, leur restriction, ou leur extension.

Hypothèse est une supposition faite soit dans l'énoncé d'une proposition, soit dans le courant d'une démonstration.

Le signe $=$ est le signe de l'égalité; ainsi l'expression $A=B$ signifie que A égale B.

Pour exprimer que A est plus petit que B, on écrit $A<B$.

Pour exprimer que A est plus grand que B, on écrit $A>B$.

Le signe + se prononce *plus;* il indique l'addition.

Le signe — se prononce *moins;* il indique la soustraction : ainsi A+B représente la somme des quantités A et B; A — B représente leur différence ou ce qui reste en ôtant B de A; de même A — B + C, ou A + C — B, signifie que A et C doivent être ajoutés ensemble, et que B doit être retranché du tout.

Le signe × indique la multiplication; ainsi A × B représente le produit de A par B. Au lieu du signe × on emploie quelquefois un point; ainsi A. B est la même chose que A × B. On indique aussi le même produit sans aucun signe intermédiaire par AB; mais il ne faut employer cette expression que lorsqu'on n'a pas en même temps à employer celle de la ligne AB, distance des points A et B.

L'expression A × (B + C — D) représente le produit de A par la quantité B + C — D. S'il fallait multiplier A + B par A — B + C, on indiquerait le produit ainsi (A + B) × (A — B + C); tout ce qui est renfermé entre parenthèses est considéré comme une seule quantité.

Un nombre mis au-devant d'une ligne ou d'une quantité, sert de multiplicateur à cette ligne ou à cette quantité; ainsi, pour exprimer que la ligne AB est prise trois fois, on écrit 3 AB; pour désigner la moitié de l'angle A, on écrit $\frac{1}{2}$ A.

Le carré de la ligne AB se désigne par $\overline{AB}^2$; son cube par $\overline{AB}^3$. On expliquera en son lieu ce que signifient précisément le carré et le cube d'une ligne.

Le signe $\surd$ indique une racine à extraire; ainsi $\surd 2$ est la racine carrée de 2; $\surd \overline{A \times B}$ est la racine du produit A × B, ou la moyenne proportionnelle entre A et B.

AXIOMES.

1. Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.

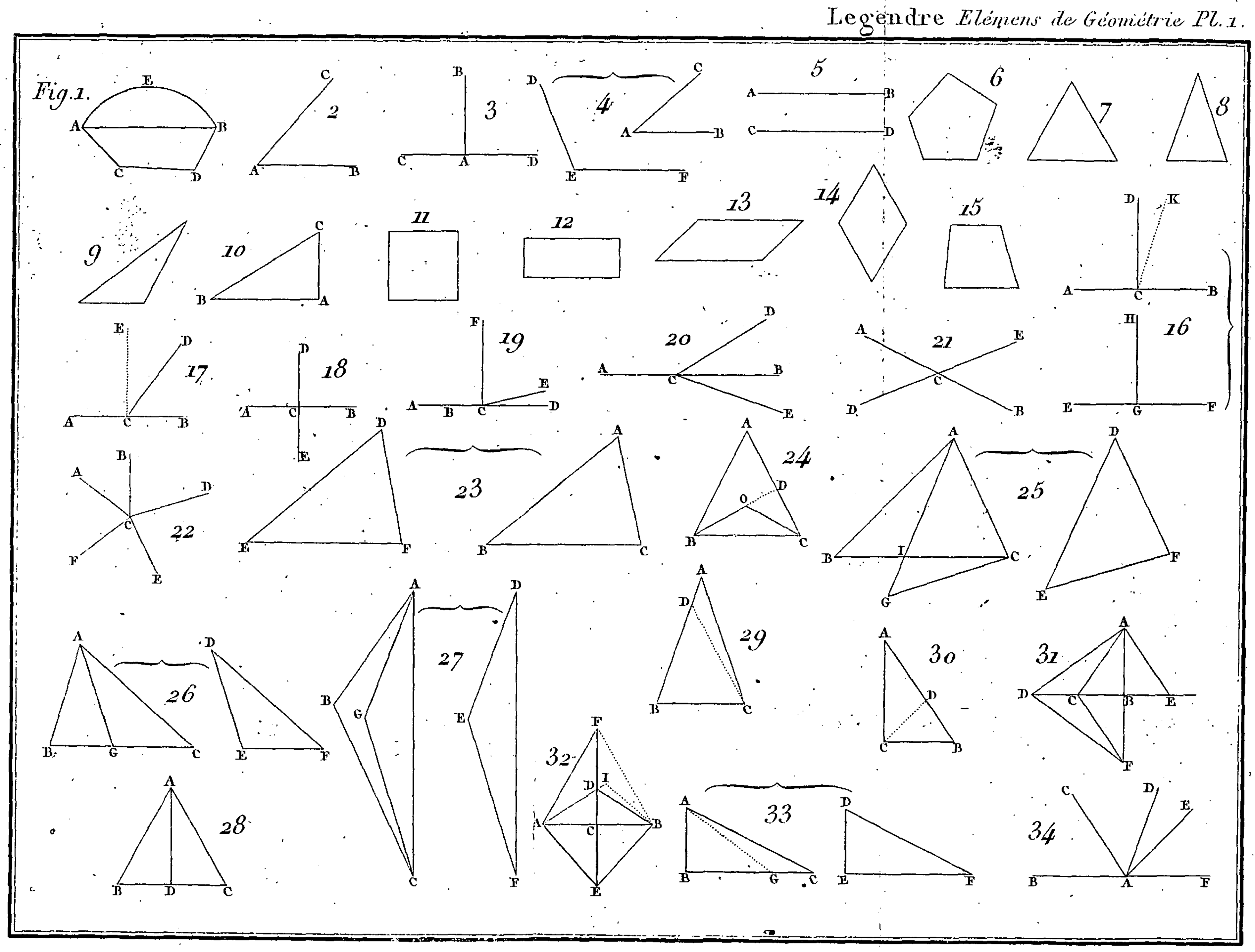


Fig. 1.
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34